Densité des fonctions continues nulles part dérivables | Leçons : 201, 203, 205, 228

Thm : L'ensemble des fonctions continues nulles part dérivables est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Preuve :

On note $\mathcal{C}$ ~~l'ensemble des~~ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On admet que $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Pour $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$U_{\varepsilon,n} = \{f\in\mathcal{C},\ \forall x\in I, \exists y\in I,\ 0<|y-x|<\varepsilon,\ |f(y)-f(x)|>n|y-x|\}$$

$\boxed{\text{Etape 1}}$ Montrons que $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert, pour ça on montre que $U_{\varepsilon,n}^c = E\setminus U_{\varepsilon,n}$ est fermé.

On remarque que $U_{\varepsilon,n}^c = \{f\in\mathcal{C}, \exists x\in I, \forall y\in I, |y-x|<\varepsilon, |f(y)-f(x)|\leq n|y-x|\}$

Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}\in(U_{\varepsilon,n}^c)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f\in\mathcal{C}$, il s'agit de montrer que $f\in U_{\varepsilon,n}^c$

Pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a $f_p\in U_{\varepsilon,n}^c$, donc

$$\exists x_p\in I, \forall y\in I, |y-x_p|<\varepsilon, |f_p(y)-f_p(x_p)|\leq n|y-x_p|$$

La suite (x_p) prend ses valeurs dans le compact I on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(p)})$ dont nous notons x la limite.

Soit $y\in I$ tel que $0<|y-x|<\varepsilon$, il existe $P\in\mathbb{N}$ tel que $0<|y-x_{\varphi(p)}|<\varepsilon$, $\forall p\geq P$

Ainsi, $\forall p\geq P$, $|f_{\varphi(p)}(y)-f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})|\leq n|y-x_{\varphi(p)}|$

On a que f est continue en x et (f_p) qui converge vers f au sens de $\|\cdot\|_\infty$

D'où $\begin{cases} |f(x_{\varphi(p)})-f(x)| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 & \text{par continuité de } f \\ |f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f(x_{\varphi(p)})| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 & \text{car } \|f_{\varphi(p)}-f\|_\infty\to 0 \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{p\to+\infty} |f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f(x)| = 0$

Il vient donc $|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} + \underbrace{|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f_{\varphi(p)}(y)|}_{\longrightarrow} + \underbrace{|f_{\varphi(p)}(y)-f(y)|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0}$

$\leq n|x_{\varphi(p)}-y| \longrightarrow n|x-y|$

D'où $|f(x)-f(y)| \leq n|x-y|$ d'où $f \in U_{\varepsilon,n}^c$ donc $U_{\varepsilon,n}^c$ est fermé et $U_{\varepsilon,n}$ ouvert

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Montrons que $U_{\varepsilon,n}$ ~~est~~ dense dans $\mathcal{C}$.

Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$, il s'agit de ~~montrer que~~ trouver $g \in U_{\varepsilon,n}$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \delta$

On va chercher g sous la forme $f(x) + \delta \sin(Nx)$

Par théorème de Heine, I étant compact, on a que f est uniformément continue.

D'où $\exists \alpha \in]0,\varepsilon[, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\delta}{4}$

On choisit $N > 2\pi$ tel que $\frac{4\pi}{N} < \alpha$ et $\frac{\delta N}{8\pi} > n$. Posons $g(x) = f(x) + \delta \sin(Nx)$

Soit $x \in I$. On a que il existe $y \in I$ tel que

$$2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi \quad \text{et} \quad |\sin(Nx) - \sin(Ny)| \overset{(*)}{\geq} 1$$

En particulier $\frac{2\pi}{N} \leq |x-y| \leq \frac{4\pi}{N}$ donc $|x-y| < \alpha$ d'où $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < \frac{\delta}{4} \cdot \frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi}$

De plus $\left|\frac{\delta\sin(Ny) - \delta\sin(Nx)}{y-x}\right| \geq \frac{\delta}{|y-x|} \geq \frac{\delta N}{4\pi}$

D'où
$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| &= \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{\delta\sin(Ny)-\delta\sin(Nx)}{y-x}\right| \\
&\geq \left|\frac{\delta\sin(Ny)-\delta\sin(Nx)}{y-x}\right| - \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \\
&\geq \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} = \frac{\delta N}{8\pi} > n \qquad \text{avec } 0 < |y-x| < \alpha < \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où $g \in U_{\varepsilon,n}$ et on a $\|f-g\|_\infty = \delta$ d'où la densité de $U_{\varepsilon,n}$ dans $\mathcal{C}$

pe 3 | On conclut avec le théorème de Baire.

Posons $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$

On a $R \subset \mathcal{C}$ qui est complet donc $\mathcal{C}$ est un espace de Baire et R est une intersection dénombrable d'ouverts denses donc R est dense dans E.

Montrons que toute fonction ~~de R~~ $f \in R$ est dérivable nulle part.

Pour tout n, $f \in U_{\frac{1}{n},n}$ donc si on se donne $x \in I$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in I, \ 0 < |x - x_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| > n$$

Donc $(x_n)_n$ tend vers x et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| = +\infty$, ce qui montre que f n'est pas dérivable en x, ceci étant vrai $\forall x \in I$ on a que f est nulle part dérivable

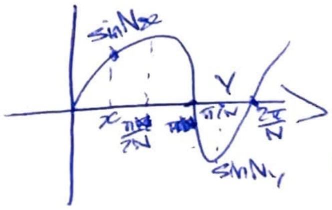
Donc $R \subset \{\text{fonctions nulles part dérivables}\} = F$
et R est dense dans $\mathcal{C}$ donc F aussi d'où le résultat.

□

Analyse, Gourdon.

$\boxed{\text{COMPLEMENT}}$

- Savoir montrer le lemme de Baire
- (*) $\forall x \in I, \exists y \in I$ tq $|\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geq 1$ en effet



ok

- Exemple d'une telle f ?